Uitwerking puzzel 95-1 Wobien Doyer

Lieke de Rooij

Raaklijnen voor slimme dummies

Deze keer bekijken we twee alternatieve methodes om raaklijnen te bepalen. De methodes en bewijzen kunnen goed in de klas bij de differentieerlessen worden gebruikt, hetzij als alternatief, hetzij voor een beter begrip. De eerste methode is het bepalen van een raaklijn aan kegelsneden. Deze staat in Nederland bekend onder de naam 'eerlijk delen'. In 'Kleintje didactiek' van Lonneke Boels in *Euclides* 94-6 wordt deze methode beschreven voor cirkels. Ook in het algemeen, dus voor $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ is het 'eerlijk delen' bekend en te vinden op internet. Een bewijs ontbreekt nogal eens, maar is wel te vinden. Meestal zijn die bewijzen echter niet erg inzichtelijk en daardoor niet erg overtuigend voor leerlingen en dus lastig te doorgronden.
De methode in het kort: Vervang x^2 door px, y^2 door qy, xy door $\frac{px+qy}{2}$, x door $\frac{x+p}{2}$ en y door $\frac{y+q}{2}$. Dus de waarden p en q worden eerlijk verdeeld over de variabelen x en y. Het resultaat is een raaklijn of poollijn door $P(p,q)$, afhankelijk of P al of niet op de kegelsnede ligt. In deze puzzel vragen we onder andere om een zo overtuigend mogelijk bewijs te zoeken of nog beter zelf te bedenken. We beginnen relatief eenvoudig met een parabool recht in het assenstelsel.

Opgave 1a: Bepaal met eerlijk delen de raaklijn aan de parabool $y = ax^2 + bx + c$ in het punt $P(p,q)$ op de parabool. En bewijs zo overtuigend mogelijk dat dit klopt.
Opgave 1b: Idem voor een cirkel. Dat mag de eenheidscirkel zijn.
Opgave 1c: Idem voor een ellips, bijvoorbeeld: $(ax)^2+(by)^2=c^2$ maar een andere notatie is ook toegestaan.
Opgave 1d: Idem voor de hyperbool $xy = a$.
Opgave 1e: En nu voor het algemene geval: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Uitwerking:

Om te beginnen de lijnen die ontstaan door "eerlijk delen" (we laten ze even staan in de vorm waarin ze ontstaan):
1a: Voor de parabool $y = ax^2 + bx + c$ in het punt $P(p,q)$: $\frac{y+q}{2} = apx + b\frac{x+p}{2} + c$
1b: voor de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$: $px + qy = 1$
1c: voor de ellips: $(ax)^2 + (by)^2 = 1$: $a^2px + b^2qy = 1$
1d: voor de hyperbool $xy = a$: $\frac{xq+yp}{2} = a$
1e voor het algemene geval: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$:
$apx + b\frac{xq+yp}{2} + cqy + d\frac{x+p}{2} + e\frac{y+q}{2} + f = 0$

Merk op dat voor alle voorschriften voor "eerlijk delen" de helft van de x-en door p en de helft van de y-en door q wordt vervangen: $x^2 \to px$, $y^2 \to qy$, $xy \to \frac{xy+xy}{2} \to \frac{py+xq}{2}$, $x \to \frac{x+x}{2} \to \frac{x+p}{2}$ en $y \to \frac{y+y}{2} \to \frac{y+q}{2}$. Als we dus zowel in de vergelijking van de kromme als in die voor de potentiële raaklijn het punt $P = (p,q)$ invullen dan hebben we 2x dezelfde formule. Dat betekent dat als $P = (p,q)$ op de kromme ligt, dan ligt het ook op de potentiële raaklijn in P.
We hoeven dus alleen na te gaan of (in de verschillende gevallen) de richtingscoëfficient klopt.

Schets van het bewijs:
We beschrijven hier een methode waarbij we eerst meetkundig aantonen dat "eerlijk delen" voor de kwadratische termen een raaklijn oplevert aan cirkels met het middelpunt in de oorsprong.
Door de cirkels uit te rekken veralgemenen we dat voor ellipsen.

Eerlijk delen voor lineaire termen en voor termen xy vinden we door de kromme-met-raaklijn te verschuiven in het rooster of te roteren om de oorsprong. In beide gevallen worden de kwadratische termen veranderd in kwadraten van tweetermen die bij uitwerken een dubbelproduct opleveren (de term $2ab$ in de uitwerking van $(a + b)^2$).
Dat is bij het verschuiven een liniaire term, bij roteren zijn het termen xy.
Als we die vergelijken met wat er op de overeenkomstige plaats in de vergelijking van de raaklijn verschijnt zien we "eerlijk delen" voor lineaire termen en termen xy.

Omdat de formules van hyperbolen en parabolen op de waarden van de parameters na gelijk zijn aan die voor ellipsen kunnen we bovenstaande resultaten ook (zonder rekenwerk) veralgemenen naar hyperbolen en parabolen.

BEWIJS

Alleen kwadratische termen en een constante

In de algemene formule van de kegelsnede $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ kiezen we dus voorlopig $b = d = e = 0$
We geven hier een bewijs voor alle figuren, en beginnen daarvoor met een cirkel met het middelpunt in de oorsprong O met $a = c = 1$ en $f = -r^2$

Cirkel

$x^2 + y^2 = r^2$
Dat de raaklijn in een punt $P(p, q)$ de lijn $px + qy = r^2$ is als volgt in te zien:
1: de richtingscoëfficient van de lijn is $-\frac{p}{q}$, dus hij staat loodrecht op de straal OP
2: hij gaat door het punt $P(p, q)$ zoals we zagen in de opmerking op de vorige bladzijde.
Voor deze cirkels kunnen we dus de raaklijn in punt $P(p, q)$ op de cirkel bepalen door in de cirkelformule x^2 te vervangen door px en y^2 door qy ("eerlijk delen").

Ellips

We vervangen nu in de cirkelformule en in de raaklijnformule x door mx, y door ny, p door mp en q door nq. In de algemene formule kiezen we dus $a = m^2$ en $c = n^2$
De figuur (cirkel met raaklijn) wordt zo in de x en de y-richting uitgerekt met factoren m en n, maar verder blijft de figuur intact, en de raaklijn blijft een raaklijn.
We hebben nu dus een ellips (of cirkel) $m^2x^2 + n^2y^2 = r^2$ met raaklijn $m^2px + n^2qy = r^2$, met raakpunt (mp, nq).
Het "eerlijk delen" werkt dus ook bij ellipsen (met het middelpunt in de oorsprong).
Terugvertaald in onze algemene formule hebben we nu:
Als $ax^2 + cy^2 + f = 0$ een ellips of een cirkel is kunnen de raaklijnen gevonden worden met behulp van eerlijk delen.

Hyperbool

Bovenstaande vergelijking is een ellips als *a* en *c* positief zijn en *f* negatief.
Als *a* en *c* een verschillend teken hebben is het een hyperbool (45 graden gedraaid t.o.v. de hyperbool $xy = 1$ uit de opgave).
Geldt het eerlijk delen nu ook voor deze hyperbolen? Het is bijna niet voorstelbaar dat dat niet zo zou zijn, maar dat volgt strikt genomen niet uit de voorgaande redenering. Die maakt gebruik van meetkundige eigenschappen van cirkels en ellipsen, en die zijn niet hetzelfde als de meetkundige eigenschappen van parabolen en hyperbolen.
We moeten dus toch onze toevlucht nemen tot algebraïsche berekeningen, maar we doen dat zonder die berekeningen daadwerkelijk uit te voeren.

We kunnen voor de vergelijking $ax^2 + cy^2 - f = 0$ de raaklijn in een punt $P = (p, q)$ op de kromme bepalen bijvoorbeeld door de vergelijking van een lijn door P op te stellen, die te snijden met de

kromme en dan de discriminant in de resulterende vergelijking op 0 te stellen, of door een op differentiëren gebaseerde methode.
Voor a en c positief en f negatief weten we al wat daar uitkomt, namelijk de raaklijn die voldoet aan "eerlijk delen". Als we nu in die berekening overal a vervangen door $-a$ wordt natuurlijk ook in de resulterende raaklijn a vervangen door $-a$, zodat ook in dat geval de raaklijn voldoet aan "eerlijk delen". Hetzelfde geldt als we f vervangen door $-f$

Lineaire termen

Cirkels, ellipsen en hyperbolen

In de algemene formule van de kegelsnede $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ is nu alleen nog $b = 0$ (dus geen term xy)
We vervangen om $d \neq 0$ te krijgen in de vergelijking voor onze cirkels, ellipsen en hyperbolen en in de bijbehorende raaklijnformules x door $x + k$ en p door $p + k$.
De hele figuur (kromme en raaklijn) wordt daardoor in de x-richting verschoven, maar verder blijft de figuur intact, en de raaklijn blijft raaklijn.
We hebben dus een kromme $a(x + k)^2 + cy^2 + f = 0$ met raaklijn
$a(p + k)(x + k) + cqy + f = 0$ of:
kromme $a(x^2 + 2kx + k^2) + cy^2 + f = 0$ en de raaklijn: $a(px + kx + kp + k^2) + cqy + f = 0$
Deze raaklijn kunnen we krijgen door in de vergelijking van de kromme x^2 en y^2 te vervangen door px en qy (eerlijk delen voor kwadraten) en x door $\frac{x+p}{2}$ (de vorm van eerlijk delen voor lineaire termen).

En natuurlijk kunnen we om $e \neq 0$ te krijgen ook y vervangen door $y + j$ en q door $q + j$, met vergelijkbaar resultaat.

De algemene formule voor krommen waarvan we de raaklijn kunnen bepalen met eerlijk delen is nu:
$ax^2 + cy^2 + 2akx + 2cjy + ak^2 + cj^2 + f = 0$, en dat kunnen we door het vervangen van variabelen schrijven als: $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$
met raaklijn in (p, q): $apx + cqy + \frac{d(x+p)}{2} + \frac{e(y+q)}{2} + f = 0$

Parabolen

Van deze algemene formule kunnen we een parabool maken door $c = 0$ te nemen. Maar "mag" dat ook? Het antwoord is ja, om dezelfde reden waarom we van de ellipsformule een hyperbool konden maken: Er is een berekening op te stellen die uit de kromme de raaklijn berekent, en die moet gelijk zijn aan de bovengegeven raaklijn. Als we in die berekening overal $c = 0$ invullen dan blijft de berekening geldig. Dus ook voor parabolen geldt het eerlijk delen.

Het is tijd voor een paar opmerkingen:

1. Niet elke vergelijking van de vorm $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ stelt een kromme voor (cirkel, ellips, hyperbool of parabool). Bijvoorbeeld heeft $x^2 + y^2 + 4 = 0$ geen oplossingen en dan zijn er dus ook geen raaklijnen.
2. Tot zover zien we dat elke term in de vergelijking van de kromme precies één term in de vergelijking van de raaklijn bepaalt (tenminste als we de raaklijn vergelijking laten staan in de vorm zoals hij ontstaat uit het "eerlijk delen"). Dat betekent dat we vergelijking van de kromme in stukjes kunnen verdelen en op elk stukje "eerlijk delen" kunnen toepassen om het bijbehorende stukje van de raaklijnformule te vinden.
   Voorbeeld: $5x^2 + 3x + 2y^2 = 7$ kan worden geschreven als de som van 2 "deelkrommen" $5x^2 + 2x + y = 3$ en $x + 2y^2 - y = 4$. De bijbehorende stukjes van de raaklijnformule zijn
   $5xp + (x + p) + \frac{y+q}{2} = 3$ en
   $\frac{x+p}{2} + 2qy - \frac{y+q}{2} = 4$.

Als we die stukjes raaklijnformule optellen dan krijgen we $5xp + \frac{3(x+p)}{2} + 2qy = 7$, en dat is de raaklijnformule van de oorspronkelijke kromme.
Merk daarbij op: Het punt $P(p, q)$ ligt op de oorspronkelijke kromme, maar waarschijnlijk niet op de deelkrommen. De "deelraaklijnen" zijn dus geen raaklijnen van die deelkrommen. Wie bekend is met poollijnen zal opmerken dat het wel poollijnen zijn van het punt (p, q) ten opzichte van de deelkrommen. Maar we zullen bij het verdelen ook "deelkrommen" gebruiken waarin alleen liniaire termen voorkomen, en daarbij is het begrip poollijn voor zover ons bekend niet gedefinieerd (en het begrip raaklijn ook niet). Toch is het heel goed mogelijk om er "eerlijk delen" op toe te passen.

Gemengde termen

Tot nu toe lagen alle krommen "recht"in het assenstelsel en hadden we geen termen xy. Als we ze roteren verschijnen er termen xy. We zullen, net zoals we deden om van cirkels ellipsen te maken, een transformatie toepassen op krommen die we tot nu toe behandeld hebben, en wel in dit geval een rotatie.
We weten dat bij rotatie over hoek α om de oorsprong een punt (x, y) wordt afgebeeld op (x', y') met $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ en
$y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha$

We herschrijven de vergelijking van de (ongeroteerde) kromme als:
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ met raaklijn $apx + cqy + \frac{d(x+p)}{2} + \frac{e(y+q)}{2} + f = 0$
en de transformatie als:
$x' = tx - sy$ en $p' = tp - sq$
$y' = ty + sx$ en $q' = tq + sp$ met $s^2 + t^2 = 1$

Om onoverzichtelijke algebraïsche afleidingen te voorkomen verdelen we zowel de kromme als de raaklijn formule in 3 delen:

1. $ax^2 = 0$ met raaklijn (of poollijn) formule $apx = 0$
2. $cy^2 = 0$ met raaklijn (of poollijn) formule $cqy = 0$
3. $dx + ey - f = 0$ met raaklijn (of poollijn) formule $\frac{d(x+p)}{2} + \frac{e(y+q)}{2} + f = 0$

ad 1: x vervangen door $tx - sy$ en p vervangen door $tp - sq$ levert op:
bijdrage aan de kromme $a(tx - sy)^2 = at^2x^2 - 2astxy + as^2y^2) = 0$
en bijdrage aan de raaklijn $a(tp - sq)(tx - sy) = at^2px - astpy - astqx + as^2qy)$ = 0
De bijdrage in de raaklijn voldoet dus aan: vervang x^2 door *px*, y^2 door *qy* (eerlijk delen voor de kwadraten) en vervang *xy* door (*qx* +*py*)/2 (de vorm van eerlijk delen voor termen *xy*).
ad 2: y vervangen door $ty + sx$ en q vervangen door $tq + sp$ levert op:
bijdrage aan de kromme $c(ty + sx)^2 = ct^2y^2 + 2cstxy + cs^2x^2) = 0$
en bijdrage aan de raaklijn $c(tq + sp)(ty + sx) = ct^2qy + cstqx + cstpy + cs^2px)$ = 0
De bijdrage in de raaklijn voldoet dus aan: vervang x^2 door px, y^2 door qy (eerlijk delen voor de kwadraten) en vervang xy door $\frac{qx + py}{2}$ (dezelfde vorm van eerlijk delen voor termen *xy* als in ad 1).

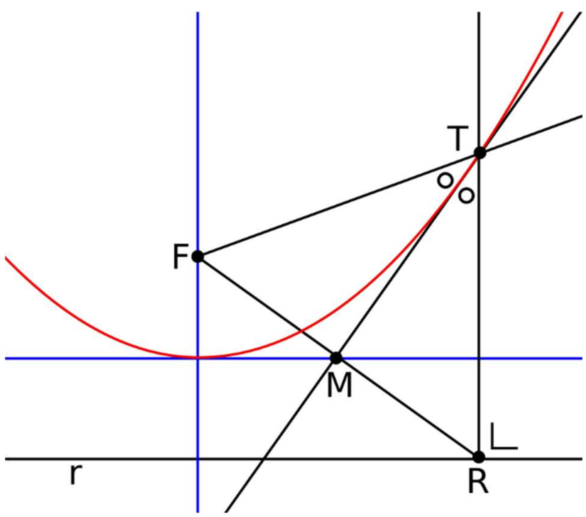
ad 3: x vervangen door $tx - sy$, y vervangen door $ty + sx$, p vervangen door $tp - sq$ en q vervangen door $tq + sp$ levert op:
Bijdrage aan de kromme: $dtx - dsy + ety + esx - f = 0$. Het bepalen van de bijdrage aan de raaklijn kunnen we achterwege laten. Na de transformatie komen de variabelen x en y alleen lineair voor, dus weten we wat de bijdrage aan de raaklijn is, die voldoet aan "eerlijk delen" voor lineaire termen.

Daarmee weten we dat de formule van de raaklijn van de geroteerde kromme voldoet aan eerlijk delen. En omdat elke tweedegraads vergelijking in 2 variabelen die oplossingen heeft een (eventueel geroteerde) kegelsnede als oplossingsruimte heeft kunnen we in al die gevallen met eerlijk delen de raaklijn vinden.

Toegift: het meetkundige bewijs van Gerard Bouwhuis voor de parabool. De parabool wordt dan gedefinieerd door het brandpunt F en de richtlijn r met afstand t tussen F en r: de parabool is de meetkundige verzameling van punten T met gelijke afstanden tot de lijn r en het punt F.
In de figuur is dus $FT = RT$.
We kiezen een assenstelsel met de oorsprong in de top van de parabool en de x-as evenwijdig aan r.
De afstanden tussen de top en de lijn r en die tussen de top en het brandpunt F is dan $\frac{t}{2}$.

De hoofdeigenschap van de raaklijn stelt dat de raaklijn in een punt T op de parabool gelijke hoeken maakt met de brandpuntvoerstraal (TF) en de richting van de hoofdas (loodrecht op r). (zie bv Dick Klingens[1]).
In onze figuur is de bissectrice van hoek FTR de raaklijn in punt T.

Omdat $FT = RT$ is MT in driehoek FRT niet alleen bissectrice, maar ook hoogtelijn en zwaartelijn, dus snijdt de bissectrice de lijn FR in het midden M, en staan TM en FR loodrecht op elkaar.
Het punt F is dan $(0, \frac{1}{2}t)$, We kiezen $T = (p, q)$, en dan is $\mathrm{R} = (p, -\frac{1}{2}t)$ en $\mathrm{R} = \frac{1}{2}p, 0)$.



De richtingcoëfficient van FM is dus $\frac{-t}{p}$ en die van de raaklijn TM $\frac{p}{t}$. TM gaat door $M = \left(\frac{1}{2}p, 0\right)$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y = \left(x - \frac{1}{2}p\right)\frac{p}{t}$ of $ty = px - \frac{1}{2}p^2$
Omdat het punt $T = (p, q)$ natuurlijk op de raaklijn ligt hebben we: $tq = \frac{1}{2}p^2$ en dus kunnen we de raaklijn herschrijven als $ty = px - tq$ of $t(y + q) = px$
Omdat (p, q) een punt op de parabool is en dit geldt voor alle punten $(x, y) = (p, q)$ op de parabool levert dit ook de vergelijking van de parabool op: $2ty = x^2$, en dat klopt met eerlijk delen.

[1] http://www.pandd.demon.nl/ Kijk bij Wiskunde – Analytische meetkunde – Parabool:meetkundige eigenschappen en constructies

Raaklijn bepalen door (staart) deling

Met een hele andere minder bekende methode kun je raaklijnen aan polynomen $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + hx^2 + ix + j$ bepalen door een deling. Deel de polynoom $f(x)$ door $(x - p)^2$ en bepaal de rest $r(x)$. Dat is dan de raaklijn in $P(p, q)$, met P op de polynoom. We geven eerst een voorbeeld met $f(x) = 2x^3 - 10x - 4$ in $P(3{,}20)$. Merk op dat we die y-waarde 20 niet nodig hebben. We gaan delen door $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Zie figuur 1. We hebben het daar genoteerd zoals dat tegenwoordig wordt gedaan volgens de 'hapmethode'. De rest $r(x)$ is dus $44x + 112$ en de raaklijn is $y = 44 - 112$. Een verrassing? Merk op dat dit voor de polynoom $y = ax^2 + bx + c$ gewoon neerkomt op het aftrekken van $a(x - p)^2$.

Opgave 2a: Bepaal zo de raaklijn aan $y = x^4 + 2x^3 + 3x - 4$ in $x = -2$.
Opgave 2b: Bewijs dat deze methode voor alle polynomen klopt.

Oplossing 2a: We delen de polynoom $x^4 + 2x^3 + 3x - 4$ door $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$:

$$\begin{array}{lrrrrl}
x^2 + 4x + 4 \;/ & x^4 + 2x^3 & & + 3x & - 4 & \backslash\; x^2 - 2x + 4 \\
 & \underline{x^4 + 4x^3} & \underline{+ 4x^2} & & & \\
 & - 2x^3 & - 4x^2 & + 3x & & \\
 & \underline{- 2x^3} & \underline{- 8x^2} & \underline{- 8x} & & \\
 & & 4x^2 & + 11x & - 4 & \\
 & & \underline{4x^2} & \underline{+ 16x} & \underline{+ 16} & \\
 & & & - 5x & - 20 &
\end{array}$$

De raaklijn is dus de lijn $y = -5x - 20$

Oplossing 2b: We schrijven de polynoom als: $y = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, en we zoeken de raaklijn in $x = p$
De deling van de polynoom door $(x - p)^2 = x^2 - 2p + p^2$ levert een quotient op en een rest. Die rest moet liniair zijn, want zolang er termen zijn met een tweede of hogere macht gaan we door met de deling.
Laat de rest $rx + s$ zijn en het quotient $Q(x)$. Dan geldt: $\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = Q(x).(x - p)^2 + rx + s$
Hieruit volgt dat voor $x = p$ de waarde van de polynoom gelijk is aan $rp + s$, en dus snijdt of raakt de lijn $y = rx + s$ de kromme in $x = p$.
Bovendien is de afgeleide van $Q(x).(x - p)^2$ in $x = p$ gelijk aan 0, dat is direct in te zien omdat het bij $x = p$ een dubbel 0-punt heeft. En dus is de afgeleide van de polynoom in het punt $x = p$ gelijk aan de afgeleide van $rx + s$, dus de lijn $y = rx + s$ is een raaklijn aan de kromme.